Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences de Tétouan

Année: 2010-2011
S.M.P.C (S2)

Module de Mathématiques II
Algèbre 2 , Série N° : 1

Exercice 1. Montrer que les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par $x \to sin(x), x \to sin(x^2)$ et $x \to sin(x^3)$ forment une famille libre.

Exercice 2. Dans $\mathbb{R}^3$, soit $u = (-1, 2, 1)$, $v = (0, 1, -1)$ et $w = (3, -4, -5)$.

1) Montrer que $\{u, v\}$ est libre et que $\{u, v, w\}$ est liée.
2) Déterminer $x \in \mathbb{R}$ pour que $(x, 1, 2) \in Vect\{u, v\}$.
3) Soit $u' = (1, 0, -3)$, $v' = (-2, 5, 1)$. Montrer que $Vect\{u, v\} = Vect\{u', v'\}$.
4) Que peut on dire de la famille $\{u', v', w\}$.

Exercice 3. On considère le système (S) $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ x + 3y + 3z = 0 \end{cases}$

Montrer que l'ensemble F des solutions de (S) est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Donner une base de F.

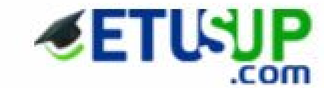
Exercice 4. Dans $\mathbb{R}^3$, comparer les sous-espaces $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ suivants : $\mathbb{F} = Vect\{(2, 3, -1); (1, -1, -2)\}$ et $\mathbb{G} = Vect\{(3, 7, 0); (5, 0, -7)\}$.

Exercice 5. Soit $E = R_5[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 5. On définit les ensembles $\mathbb{F} = \{P \in E | P(0) = 0\}$ et $\mathbb{G} = \{P \in E, (X^2+1)|P\}$.

1) Montrer que $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ sont des sous-espaces vectoriels de E.
2) Déterminer une base de $\mathbb{F}$, $\mathbb{G}$ et $\mathbb{F} \cap \mathbb{G}$.

Exercice 6.

1. Soit $\mathbb{F} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + 2y - 5z = 0\}$ Montrer que $\mathbb{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Trouver une base B de $\mathbb{F}$. Quelle est la dimension de $\mathbb{F}$?
3. Soit $\mathbb{G} = Vect\{(1, 2, 1), (1, 1, -1), (1, 4, 5)\}$. Déterminer une (ou des) équations cartésiennes de $\mathbb{G}$.
4. Extraire de $\{(1, 2, 1), (1, 1, -1), (1, 4, 5)\}$ une base B' de $\mathbb{G}$.
5. Extraire de $B \cup B'$ une base de $\mathbb{F} + \mathbb{G}$.
6. Quelle est la dimension de $\mathbb{F} + \mathbb{G}$.
7. En déduire la dimension de $\mathbb{F} \cap \mathbb{G}$.



Exercice 7. Soient les vecteurs $v_1 = (1-i, i)$ et $v_2 = (2, -1+i)$ dans $\mathbb{C}^2$.

(a) Montrer que le système $\{v_1, v_2\}$ est $\mathbb{R}$-libre et $\mathbb{C}$-lié.

(b) Vérifier que le système $S = \{(1,0); (i,0); (0,1); (0,i)\}$ est une base de l'e.v. $\mathbb{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, et donner les composantes des vecteurs v_1 et v_2 par rapport à cette base.

Exercice 8. Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel de dimension n et φ une application linéaire de $\mathbb{E}$ dans lui-mme telle que $\varphi^n = 0$ et $\varphi^{n-1} \neq 0$. Soit $x \in \mathbb{E}$ tel que $\varphi^n(x) \neq 0$. Montrer que la famille $\{x, \varphi(x), ..., \varphi^{n-1}(x)\}$ est une base de $\mathbb{E}$.

Exercice 9. Soit $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de E tel que: $f(e_1) = 2e_1 + e_2 - 3e_3$, $f(e_2) = e_1 - e_2 + e_3$ et $f(e_3) = 0_E$. Trouver $Ker(f)$ et $Im(f)$ en précisant une base de chacun de ces sous-espaces

Exercice 10. Soit E l'espace vectoriel des suites réelles $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_{n+3} = 2U_{n+2} + U_{n+1} - 2U_n$.

a) Montrer que l'application $\psi : E \to \mathbb{R}^3$ telle que $\psi((U_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (U_0, U_1, U_2)$ est un isomorphisme.

b) Chercher les valeurs de $r \in \mathbb{R}$ pour lesquelles $(U_n)_{n\in\mathbb{N}} = (r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est élément de E. En déduire une expression simple du terme général U_n de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$.

Exercice 11. Soit $\mathbb{E} = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré ≤ 2 muni de la base canonique $B = \{1, X, X^2\}$.

1) Montrer que $B' = \{1, 1+X, 1+X^2\}$ est une base de $\mathbb{E}$. Donner les coordonnées de $P = X^2 - 2X + 1$ dans la base B'.

2) Soit $f : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ telle que $f(P) = (1-X^2)P'' + 2P$, où P'' désigne la dérivée seconde du polynôme P.

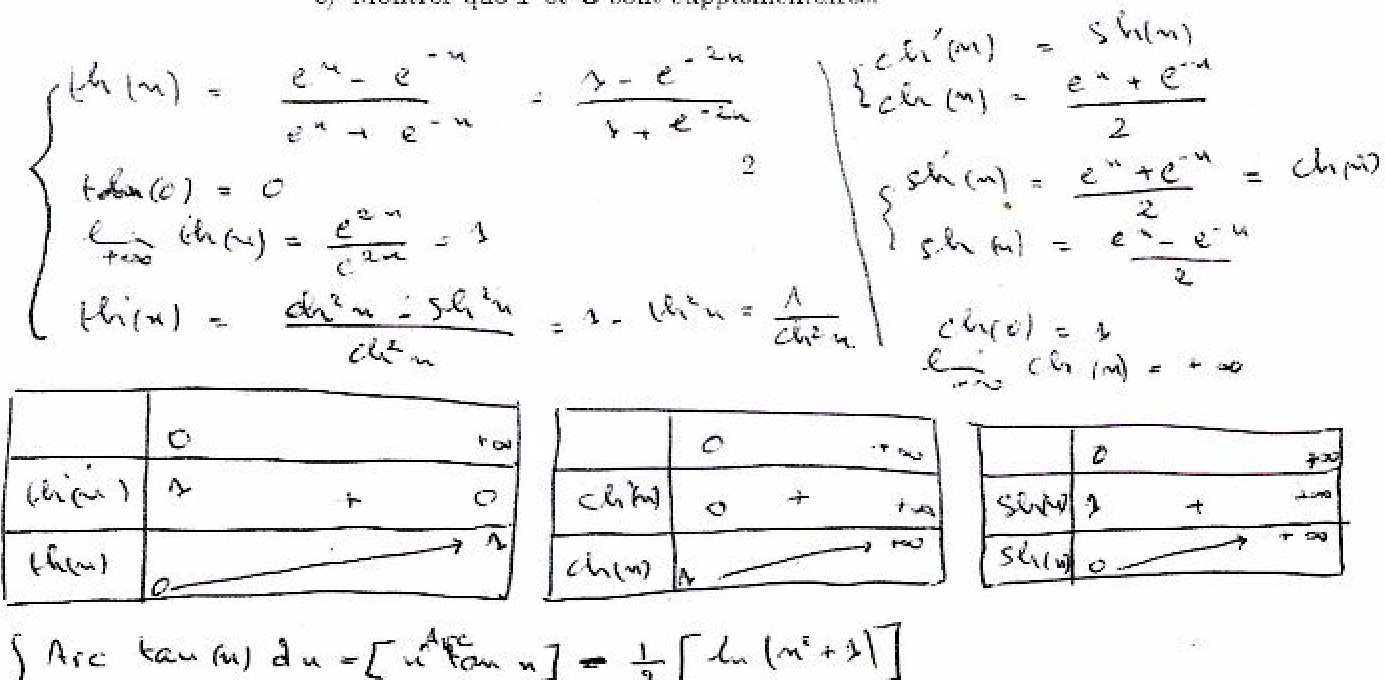
a/ Montrer que f est une application linéaire.

b/ Déterminer $\mathbb{F}$ le noyau de f. Trouver une base de $\mathbb{F}$ et compléter cette base en une base de $\mathbb{E}$.

c/ f est-elle injective? surjective? bijective?

d/ Déterminer $\mathbb{G}$ l'image de f. Trouver une base de $\mathbb{G}$.

e/ Montrer que $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ sont supplémentaires.



Exercice 1

$$f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \rightsquigarrow \sin(x)$$

$$f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \rightsquigarrow \sin(x^2)$$

$$f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \rightsquigarrow \sin(x^3)$$

Montrons que (f_1, f_2, f_3) est libre

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ dans $\mathbb{R}$

tels que :

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = \theta$$

$\Rightarrow (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3)(x) = \theta(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$(\lambda_1 f_1)(x) + (\lambda_2 f_2)(x) + (\lambda_3 f_3)(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \lambda_3 f_3(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\lambda_1 \sin x + \lambda_2 \sin(x^2) + \lambda_3 \sin(x^3) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

on dérive :

$* \{ \lambda_1 \cos x + 2\lambda_2 x \cos(x^2) + 3\lambda_3 x^2 \cos(x^3) = 0 \} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

En particulier pour $x = 0$

$\lambda_1 \cos 0 = 0$

$\Rightarrow \{\lambda_1 = 0\} \qquad (\cos 0 = 1)$

$* \; 2\lambda_2 x \cos(x^2) + 3\lambda_3 x^2 \cos(x^3) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

Dérivons :

$2\lambda_2\left(\cos(x^2) - 2x^2 \sin(x^2)\right) + 3\lambda_3\left(2x \cos(x^3) - 3x^4 \sin(x^3)\right) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

En particulier pour $x = 0$

$2\lambda_2 \cos(0) = 0$

$\Rightarrow \{\lambda_2 = 0\}$

on a montré que $\lambda_1, \lambda_2 = 0$
donc on remplace dans
$\lambda_1 \sin x + \lambda_2 \sin(x^2) + \lambda_3 \sin(x^3) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
Il reste $\lambda_3 \sin(x^3) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
pour $x = 1$
$\lambda_3 \sin(1) = 0$
$\Rightarrow \{\lambda_3 = 0\}$ car $\sin 1 \neq 0$

Exercice 2

dans $\mathbb{R}^3$
$u = (-1, 2, 1)$, $v = (0, 1, -1)$
1) $\{u, v\}$ est libre
si $\alpha u + \beta v = 0$
$\Rightarrow \alpha(-1, 2, 1) + \beta(0, 1, -1) = (0,0,0)$
$\Rightarrow (-\alpha, 2\alpha, \alpha) + (0, \beta, -\beta) = (0,0,0)$
$\Rightarrow (-\alpha, 2\alpha + \beta, \alpha - \beta) = (0,0,0)$
$\Rightarrow \begin{cases} -\alpha = 0 \rightarrow \alpha = 0 \\ 2\alpha + \beta = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \rightarrow \alpha = \beta \end{cases}$
on a $w = (3, -4, -5)$
Montrons que $\{u, v, w\}$ est liée
on remarque que :
$(3, -4, -5) = -3(-1, 2, 1) + 2(0, 1, -1)$
$= (3, -6, -3) + (0, 2, -2)$
$= (3, -4, -5)$.

donc $w = -3u + 2v$
$-3u + 2v - w = 0$
donc $\{u, v, w\}$ est liée

$3u = -w + 2v$



2) $x \in \mathbb{R}$

$(x, 1, 2) \in vect(u, v) \Leftrightarrow \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ telque $(x, 1, 2) = \alpha u + \beta v$

$(x, 1, 2) = \alpha(-1, 2, 1) + \beta(0, 1, -1)$

$= (-\alpha, -2\alpha, \alpha) + (0, \beta, -\beta)$

$= (-\alpha, 2\alpha + \beta, \alpha - \beta)$

$\begin{cases} x = -\alpha \\ 1 = 2\alpha + \beta \\ 2 = \alpha - \beta \end{cases} \rightarrow 3 = 3\alpha \rightarrow \alpha = 1 \quad x = -1$

$\beta = \alpha - 2$

$\beta = 1 - 2 = -1$

* Dans $\mathbb{R}$

$u = (-1, 2, 1)$ $\quad v = (0, 1, -1)$

3) $u' = (1, 0, -3)$ $\quad v' = (-2, 5, 1)$

$vect(u, v) = vect(u', v')$

$u' = \alpha u + \beta v$

$(1, 0, -3) = \alpha(-1, 2, 1) + \beta(0, 1, -1)$

$= (-\alpha, 2\alpha, \alpha) + (0, \beta, -\beta)$

$(1, 0, -3) = (-\alpha, 2\alpha + \beta, \alpha - \beta)$

$\Rightarrow \begin{cases} 1 = -\alpha \\ 0 = 2\alpha + \beta \\ -3 = \alpha - \beta \end{cases} \rightarrow \alpha = -1$

$\beta = \alpha + 3 \rightarrow \beta = 2$

Donc $u' = -u + 2v$

$\Rightarrow u' \in vect\{u, v\}$

* $v' = \lambda u + \mu v$

$(-2, 5, 1) = \lambda(-1, 2, 1) + \mu(0, 1, -1)$

$= (-\lambda, 2\lambda, \lambda) + (0, \mu, -\mu)$

$(-2, 5, 1) = \lambda(-1, 2, 1) + \mu(0, 1, -1)$

$= (-\lambda, 2\lambda, \lambda) + (0, \mu, -\mu)$

$(-2, 5, 1) = (-\lambda, 2\lambda + \mu, \lambda - \mu)$

$\begin{cases} -2 = -\lambda \\ 5 = 2\lambda + \mu \\ 1 = \lambda - \mu \end{cases}$ $\rightarrow$ $\boxed{\lambda = 2}$, $\boxed{\mu = 1}$

$v' = 2u + v$

$\Rightarrow \boxed{v' \in vect\{u, v\}}$

$\Rightarrow \boxed{vect\{u', v'\} \in vect\{u, v\}}$ ①

Montrons que $vect\{u' v'\} \subset vect\{u, v\}$

Soit $\boxed{w \in vect\{u'; v'\}}$

$w = \alpha u' + \beta v'$ $(\alpha, \beta$ dans $\mathbb{R})$

$= \alpha(-u + 2v) + \beta(2u + v)$

$= (\underbrace{-\alpha + 2\beta}_{\lambda})u + (\underbrace{2\alpha + \beta}_{\mu})v$

donc $\boxed{w \in vect\{u, v\}}$

* $u = ?$
$v = ?$

on a $\begin{cases} u' = -u + 2v \\ v' = 2u + v \end{cases}$

$\begin{cases} u' = -u + 2v \Rightarrow u' - 2v' = -5u \\ 2v' = 4u + 2v \Rightarrow \boxed{u = -\frac{1}{5}u' + \frac{2}{5}v'} \end{cases}$

donc $\boxed{u \in vect\{u', v'\}}$

$\begin{cases} 2u' = -2u + 4v \\ v' = 2u + v \end{cases}$

$2u' + v' = 5v$

$\Rightarrow v = \frac{2}{5}u' + \frac{1}{5}v'$

$\Rightarrow \boxed{v \in vect\{u', v'\}}$ $\left(\begin{array}{l} \boxed{u \in vect\{u, v\}} \\ \boxed{v \in vect\{u, v\}} \end{array} \right)$ $\boxed{\Rightarrow vect(u, v) \subset (vect(u', v')}$ ②

① et ② $\Rightarrow vect\{u, v\} = vect\{u', v'\}$

4) $\{u', v', w\}$ $w = (3, -4, 5)$

$(3, -4, -5) = 3(-1, 2, -1) + 2(0, 1, -1)$

$w = -3u + 2v$

on a $w \in vect\{u, v\}$

Mais $vect\{u, v\} = vect\{u', v'\}$

donc $w \in vect\{u', v'\}$

$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ telle que $w = \lambda u' + \mu v'$

EX3

$$(S) \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ x + 3y + 3z = 0 \end{cases}$$

$F \neq \emptyset$

$(0,0,0) \in F$

$$\begin{cases} 0 + 0 - 0 = 0 \\ 0 + 2(0) + 0 = 0 \\ 0 + 3(0) + 3(0) = 0 \end{cases}$$

Soient $(x, y, z) \in F$; $(x', y', z') \in F$

λ, λ' dans $\mathbb{R}$

$\lambda(x, y, z) + \lambda'(x', y', z') \overset{?}{\in} F$

$\lambda(x, y, z) + \lambda'(x', y', z') = \underbrace{(\lambda x + \lambda' x', \lambda y + \lambda' y', \lambda z + \lambda' z')}_{*}$

1ère ligne

$(\lambda x + \lambda' x') + (\lambda y + \lambda' y') - (\lambda z + \lambda' z')$

$\lambda(\underbrace{x + y - z}_{0}) + \lambda'(\underbrace{x' + y' - z'}_{0}) = 0$

2ème ligne

$(\lambda x + \lambda' x') + 2(\lambda y + \lambda' y') + (\lambda z + \lambda' z') = \lambda(\underbrace{x + 2y + z}_{0}) + \lambda'(\underbrace{x' + 2y' + z'}_{0}) = 0$

3ème ligne

$(\lambda x + \lambda' x') + 3(\lambda y + \lambda' y') + 3(\lambda z + \lambda' z') = \lambda(\underbrace{x + 3y + 3z}_{0}) + \lambda'(\underbrace{x' + 3y' + 3z'}_{0}) = 0$

donc $(*) \in F$



$$S \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z=0 \\ y+2z=0 \\ 2y+4z=0 \end{cases} \sim \begin{cases} x+y-z=0 \\ y+2z=0 \\ 0=0 \end{cases} \sim$$

$$\begin{cases} x+0-3z=0 \\ y+2z=0 \\ 0=0 \end{cases}$$

Si $(x,y,z) \in F \Leftrightarrow x=3z$ et $y=-2z$

$F=\{(3\alpha,-2\alpha,\alpha) / \alpha \in \mathbb{R}\}$
$=\{\alpha(3,-2,1) / \alpha \in \mathbb{R}\}$

donc $\{(3,-2,1)\}$ est engendre F
En plus $\{3,-2,1\}$ libre
donc $\{3,-2,1\}$ est une base de F
donc $F=1$

Ex 4

$\mathbb{R}^3$

$F=\text{vect}\{(2,3,-1),(1,-1,-2)\}$
$G=\text{vect}\{(3,7,0),(5,0,-7)\}$

$(3,7,0)=\alpha(2,3,-1)+\beta(1,-1,-2)$ α ? β ?
$(3,7,0)=(2\alpha,3\alpha,-\alpha)+(\beta,-\beta,-2\beta)$
$\Rightarrow (3,7,0)=(2\alpha+\beta,3\alpha-\beta,-\alpha-2\beta)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3=2\alpha+\beta \\ 7=3\alpha-\beta \\ 0=-\alpha-2\beta \rightarrow \alpha=-2\beta \end{cases}$$

$3-3\beta$
$\beta=-1 \Rightarrow \alpha=2$

$(3,7,0)=2(2,3,-1)-(1,-1,-2)$
donc $(3,7,0) \in F$

$(5,0,-7) = \lambda(2,3,-1) + \mu(1,-1,-2)$
$= (2\lambda, 3\lambda, -\lambda) + (\mu, -\mu, -2\mu)$

$(5,0,-7) = (2\lambda+\mu, 3\lambda-\mu, -\lambda-2\mu)$

$\begin{cases} 5 = 2\lambda+\mu \\ 0 = 3\lambda-\mu \\ -7 = -\lambda-2\mu \end{cases} \rightarrow \mu = 3\lambda \qquad 5\lambda = 5 \rightarrow \lambda = 1$
$\mu = 3$

$\Rightarrow (5,0,-7) = (2,3,-1) + 3(1,-1,-2)$
donc $(5,0,-7) \in F$

$G \subset F$

$\dim F = ?$
Montrons que $\{(2,3,-1),(1,-1,-2)\}$ est libre
Si $\alpha(2,3,-1) + \beta(1,-1,-2) = (0,0,0)$
$\Rightarrow (2\alpha, 3\alpha, -\alpha) + (\beta, -\beta, -2\beta) = (0,0,0)$

$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta = 0 \\ 3\alpha - \beta = 0 \\ -\alpha - 2\beta = 0 \end{cases} \rightarrow \boxed{\beta = 3\alpha}$

$5\alpha = 0 \rightarrow \boxed{\alpha = 0}$
$\boxed{\beta = 0}$

$B = \{(2,3,-1),(1,-1,-2)\}$ engendre F
Enplus B est libre
donc B est une base de F
$\boxed{\dim F = 2}$

$\dim G = ?$
si $\alpha(3,7,0) + \beta(5,0,-7) = (0,0,0)$
$\Rightarrow (3\alpha, 7\alpha, 0) + (5\beta, 0, -7\beta) = (0,0,0)$
$\Rightarrow (3\alpha+5\beta, 7\alpha, -7\beta) = (0,0,0)$



$$\begin{cases} 3\alpha + 5\beta = 0 \\ 7\alpha = 0 \\ -7\beta = 0 \end{cases} \rightarrow \alpha = 0,\ \beta = 0$$

dim G = 2

on a montré que $G \subset F$

$G \subset F$

et $\dim G = \dim F$) $F = G$

ou bien on montre que

$F \subset G$

$\begin{cases} G \subset F \\ \text{et } F \subset G \end{cases} \Rightarrow F = G$

Exercice 5

$E = \mathbb{R}_5[X]$

$F = \{P \in E \ / P(0) = 0\}$

$G = \{P \in E \ / \ x^2 + 1 / P\}$

$F \neq \emptyset$

$0 \in F$

(si $P = 0$ $P \in E$ et $P(0) = 0$)

Soient $P \in F$ et $Q \in F$

α, β dans $\mathbb{R}$

$\alpha P + \beta Q \in F$

on a : $\alpha P + \beta Q \in E$

$\begin{cases} P \in E \text{ et } Q \in E \\ \alpha P + \beta Q \in E \end{cases}$) car E est un espace vectoriel

$* \ (\alpha P + \beta Q)(0) = (\alpha P)(0) + (\beta Q)(0)$

$= \alpha P(0) + \beta Q(0)$

$= \alpha(0) + \beta(0) = 0$]

F est donc un sev de E

$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$

$\alpha(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \cdots a_5 x^5)$

$\beta(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 \cdots b_5 x^5)$

$G \neq \emptyset$ car $0 \in G$

$0 = (X^2+1)(0)$

Soient P, Q dans G

α, β dans $\mathbb{R}$

$\alpha P + \beta Q \in G$

On a $\alpha P + \beta Q \in E$ (car $P \in E$

$Q \in E$

α, β d $\mathbb{R}$

On a : $P = (X^2+1)P'$

$Q = (X^2+1)Q'$

$\alpha P + \beta Q = \alpha(X^2+1)P' + \beta(X^2+1)Q'$

$\alpha P + \beta Q = (X^2+1)(\alpha P' + \beta Q')$

Alors $\alpha P + \beta Q \in G$

G est donc un sev de E

2) * $P \in F \Leftrightarrow$ le coefficient constant égal a 0

$P = a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 + a_4 X^4 + a_5 X^5$

$\Rightarrow S = \{X, X^2, X^3, X^4, X^5\}$ est un système générateur de F

En plus S est libre car

si $\alpha X + \beta X^2 + \gamma X^3 + \lambda X^4 + \mu X^5 = 0$

$\Rightarrow \alpha = 0$

$\beta = 0$

$\gamma = 0$

$\lambda = 0$

$\mu = 0$

donc $\{X, X^2, X^3, X^4, X^5\}$ est une base de F

* Si $P \in G$

$P(X) = (X^2+1)(aX^3 + bX^2 + cX + d)$

$= aX^3(X^2+1) + bX^2(X^2+1) + cX(X^2+1) + d(X^2+1)$

Donc $\beta = \{X^3(X^2+1), X^2(X^2+1), X(X^2+1), (X^2+1)\}$ est un système générateur de G

En plus B est libre car

$\alpha X^3(X^2+1)+\beta X^2(X^2+1)+\gamma X(X^2+1)+\lambda(X^2+1)=0$

Le coefficient dominant c'est 2

donc $\alpha=0$

on remplace

$\beta X^2(X^2+1)+\dots=0$

De même $\beta=0$ $\gamma=0$ $\lambda=0$

Donc $\{X^3(X^2+1), X^2(X^2+1), X(X^2+1), X^2+1\}$

est une base de G

* $E=\mathbb{R}_5[X]$

$F=\{p\in E \,/\, p(0)=0\}$

$G=\{p\in E \,/\, x^2+1/p\}$

une base de $F\cap G$

Soit $p\in F\cap G \Leftrightarrow p\in F$ et $p\in G$

si $p\in G$ $p=(x^2+1)\underbrace{(ax^3+bx^2+cx+d)}_{\deg\leq 3}$

Si en plus $p\in F$ $d=0$

$p\in F\cap G \Rightarrow p=(x^2+1)(ax^3+bx^2+cx)$

$p=ax^3(x^2+1)+bx^2(x^2+1)+cx(x^2+1)$

$\Rightarrow \{x^3(x^2+1), x^2(x^2+1), x(x^2+1)\}$ est un système générateur de $F\cap G$

En plus si $\alpha X^3(X^2+1)+\beta X^2(X^2+1)+\gamma X(X^2+1)=0$

$\Rightarrow \alpha=0$ $\beta=0$ $\gamma=0$

on remplace

$\Rightarrow (X^3(X^2+1), X^2(X^2+1), X(X^2+1))$ est libre

Donc c'est base de $F\cap G$



Ex 6

1) $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + 2y - 5z = 0\}$

F sev $\in \mathbb{R}^3$

$F \neq \emptyset$ car

$(0,0,0) \in F \quad 0 + 2(0) - 5(0) = 0$

Soient $(x, y, z) \in F$, $(x', y', z') \in F$

λ, λ' dans $\mathbb{R}$

$\lambda(x, y, z) + \lambda'(x', y', z') \overset{?}{\in} F$

on a :

$\lambda(x, y, z) + \lambda'(x', y', z') = (\lambda x, \lambda y, \lambda z) + (\lambda' x' + \lambda' y' + \lambda' z')$

$(\lambda x + \lambda' x', \lambda y + \lambda' y', \lambda z + \lambda' z')$

$(\lambda x + \lambda' x') + 2(\lambda y + \lambda' y') - 5(\lambda z + \lambda' z') = \lambda(\underbrace{x + 2y - 5z}_{=0})$

$+ \lambda'(\underbrace{x' + 2y' - 5z'}_{=0}) = 0$

car $(x, y, z) \in F$

car $(x', y', z') \in F$

2) une base β de F

soit $(x, y, z) \in F \Leftrightarrow x + 2y - 5z = 0$

$x + 2y - 5z = 0$

$\Rightarrow x = -2y + 5z$

$(x, y, z) = (-2y + 5z, y, z)$

$= (-2y, y, 0) + (5z, 0, z)$

$= y(-2, 1, 0) + z(5, 0, 1)$

$F = \{y(-2, 1, 0) + z(5, 0, 1) / (y, z) \in \mathbb{R}^2\}$

$B = \{(-2, 1, 0), (5, 0, 1)\}$ engendre F

En plus si $\alpha(-2,1,0)+\beta(5,0,1)=(0,0,0)$

$\Rightarrow (-2\alpha+5\beta, \alpha, \beta)=(0,0,0)$

$\Rightarrow \alpha=\beta=0$

Alors B est libre, c'est donc une base de F

$\dim F = 2$

3.) $G = \text{Vect}\{(1,2,1),(1,1,-1),(1,4,5)\}$

Soit $(x,y,z)\in G \Leftrightarrow \alpha,\beta,\gamma$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$(x,y,z)=\alpha(1,2,1)+\beta(1,1,-1)+\gamma(1,4,5)$

$(\alpha,2\alpha,\alpha)+(\beta,\beta,-\beta)+(\gamma,4\gamma,5\gamma)=(x,y,z)$.

$(\alpha+\beta+\gamma, 2\alpha+\beta+4\gamma, \alpha-\beta+5\gamma)=(x,y,z)$

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=x\\ 2\alpha+\beta+4\gamma=y\\ \alpha-\beta+5\gamma=z\end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&x\\2&1&4&y\\1&-1&5&z\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}\boxed{1}&1&1&x\\0&-1&2&y-2x\\0&-2&4&z-x\end{array}\right)$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}\boxed{1}&1&1&x\\0&\boxed{1}&-2&2x-y\\0&2&-4&x-z\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&3&-x+y\\0&1&-2&2x-y\\0&0&0&-3x+2y-z\end{array}\right)$$

Il faut que $0=-3x+2y-z$

$\boxed{3x-2y+z=0}$



$$\begin{cases} \text{Si } \alpha(1,2,1)+\beta(1,1,-1)+\gamma(1,4,5)=(0,0,0) \\ \alpha+\beta+\gamma, 2\alpha+\beta+4\gamma, \alpha-\beta+5\gamma)=(0,0,0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=0 \\ 2\alpha+\beta+4\gamma=0 \\ \alpha-\beta+5\gamma=0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

et $(1,4,5)=3(1,2,1)-2(1,1,-1)$

$(3,6,3)-(2,2,-2)$

$(1,4,5)$

4) Si $w \in G$ $\quad w=\alpha(1,2,1)+\beta(1,1,-1)+\gamma(1,4,5)$

$=\alpha(1,2,1)+\beta(1,1,-1)+\gamma[3(1,2,1) - 2(1,1,-1)]$

$=(\alpha+3\gamma)(1,2,1)+(\beta-2\gamma)(1,1,-1)$

$\Rightarrow \{(1,2,1),(1,1,-1)\} \Rightarrow$ générateur

$B'=\{(1,2,1),(1,1,-1)\}$ est une base de G

$\dim G=2$

5) Si $w \in F+G$

donc $w=u+v$ $\quad u\in F, v \in G$

$\Rightarrow =\alpha(-2,1,0)+\beta(5,0,1)+\gamma(1,2,1)+\delta(1,1,-1)$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ dans $\mathbb{R}$

$\Rightarrow \{(-2,1,0),(5,0,1),(1,2,1),(1,1,-1)\}$ engendre $F+G$

Si $\alpha(-2,1,0)+\beta(5,0,1)+\gamma(1,2,1)+\delta(1,1,-1)=(0,0,0)$

$(-2\alpha+5\beta+\gamma+\delta, 2+2\gamma+\delta, \beta+\gamma-\delta)=(0,0,0)$.

$$\begin{cases} -2\alpha+5\beta+\gamma+\delta=0 \\ \alpha+2\gamma+\delta=0 \\ \beta+\gamma-\delta=0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 5 & 3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \{(-2,1,0),(5,0,1),(1,1,-1)\}$ est libre

et $(1,2,1) = 2(-2,1,0)+(5,0,1)$

$\Rightarrow \{(-2,1,0),(5,0,1),(1,1,-1)\}$ est une base de $F+G$

7) on a

$\dim F+G = \dim F + \dim G - \dim F\cap G$

$\Rightarrow \dim F\cap G = \dim F + \dim G - \dim F+G$

$= 2+2-3$

$\Rightarrow \dim F\cap G = 1$

on a : $(1,2,1) \in G$

Mais $(1,2,1) = 2(-2,1,0)+(5,0,1)$

donc $(1,2,1) \in F$

or $F\cap G = 1$

$\{(1,2,1)\}$ est une base $F\cap G$

Ex7

$v_1 = (1-i, i) \quad v_2 = (2, -1+i)$

Si $\alpha(1-i, i) + \beta(2, -1+i) = (0,0)$ α, β dans $\mathbb{R}$

$\Rightarrow (\alpha - \alpha i, \alpha i) + (2\beta, -\beta + i\beta) = (0,0)$

$\Rightarrow (\alpha + 2\beta - \alpha i, -\beta + (\alpha+\beta) i) = (0,0)$

$$\begin{cases} (\alpha+2\beta) - \alpha i = 0 \\ -\beta + (\alpha+\beta) i = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ -\alpha = 0 \rightarrow \alpha = 0 \\ -\beta = 0 \rightarrow \beta = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases}$$


ETUSUP.com